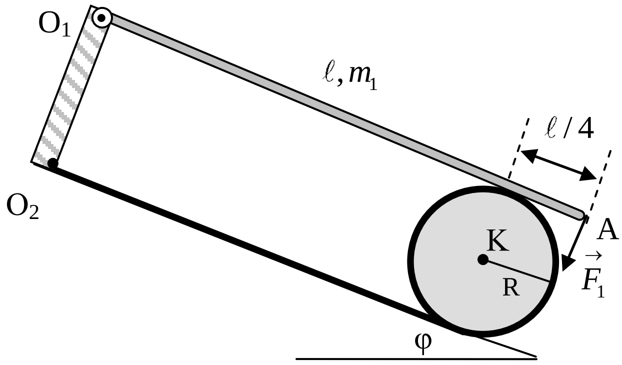
ΕΚΦΩΝΗΣΗ



Ομογενής ράβδος O_1A που έχει μήκος $\ell = 6m$ και μάζα $m_1 = 1kg$ μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το ένα άκρο της O_1 και είναι κάθετος σ' αυτήν (άρθρωση O_1). Η ράβδος ισορροπεί ακουμπώντας πάνω σε κύλινδρο σε απόσταση $\frac{\ell}{4}$ από το άλλο άκρο της A και είναι παράλληλη σε κεκλιμένο επίπεδο. Ασκώντας στο άκρο A δύναμη $\vec{F}_1$ κάθετη στη ράβδο, όπως φαίνεται στο σχήμα, ο κύλινδρος που έχει μάζα $m_2 = 2kg$, ακτίνα $R = \frac{3}{2}m$ και είναι τυλιγμένος με αβαρές και μη εκτατό νήμα, το ένα άκρο του οποίου είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο O_2, ισορροπεί πάνω στο λείο κεκλιμένο επίπεδο που έχει γωνία κλίσης $\varphi = 30^o$.
Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου - κυλίνδρου είναι $\mu_s = 0,1\sqrt{3}$.
Να βρεθεί:

Α] i) Η στατική τριβή που ασκείται στον κύλινδρο από τη ράβδο.

ii) Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_1$.

Β] Κάποια στιγμή παύει να ασκείται η δύναμη $\vec{F}_1$ και ταυτόχρονα στο ίδιο σημείο A, ασκείται μια άλλη δύναμη $\vec{F}_2$ σταθερού μέτρου με φορά αντίθετη της $\vec{F}_1$ εκείνη τη στιγμή και είναι συνέχεια κάθετη στη ράβδο. Εάν η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου, όταν περνά από την κατακόρυφη θέση είναι $\omega_1 = 5\frac{rad}{s}$,να βρεθεί :

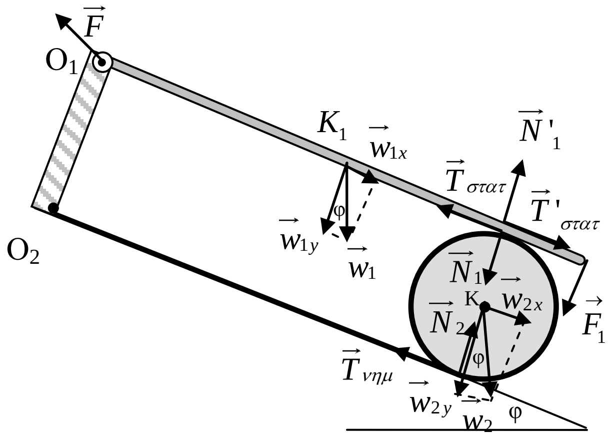
i) Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_2$.

ii) Η ταχύτητα ενός βλήματος μάζας $m_3 = 2kg$ που κινείται οριζόντια και σφηνώνεται στο μέσο της ράβδου, όταν αυτή περνά από την κατακόρυφη θέση της, ενώ ταυτόχρονα καταργείται η δύναμη $\vec{F}_2$, έτσι ώστε το συσσωμάτωμα (ράβδος - βλήμα) μετά την κρούση να έχει γωνιακή ταχύτητα που έχει μέτρο $\omega_2 = 2\frac{rad}{s}$ με φορά αντίθετη αυτής που είχε η ράβδος πριν τη κρούση.

iii) Η στροφορμή του συστήματος ράβδος - βλήμα όταν περνά από την οριζόντια θέση.

Δίνονται: για τη ράβδο $I_{cm} = \frac{1}{12}m_1\ell^2$, για τον κύλινδρο $I_{cm} = \frac{1}{2}m_2R^2$ και $g = 10m/s^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Α] Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο και στον κύλινδρο φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Για την ισορροπία της ράβδου ως προς την περιστροφική κίνηση ισχύει:

- $\Sigma\tau_{(O_1)}=0 \Rightarrow \tau_{N'_1}-\tau_{w_{1y}}-\tau_{F_1}=0 \Rightarrow$
  $N'_1\dfrac{3\ell}{4}-w_{1y}\dfrac{\ell}{2}-F_1\ell=0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \dfrac{3N'_1}{4}=\dfrac{m_1 g\sigma\upsilon\nu\phi}{2}+F_1 \quad (1).$

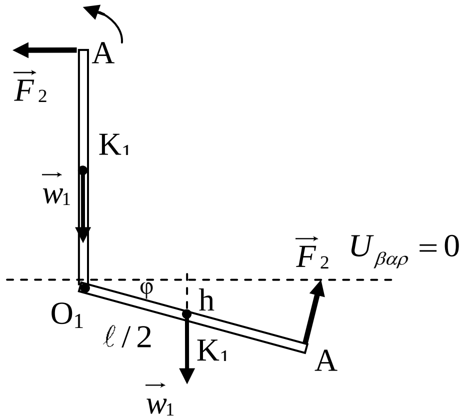
Για την ισορροπία του κυλίνδρου ως προς την περιστροφική και ως προς την μεταφορική κίνηση ισχύει αντίστοιχα:

- $\Sigma\tau_{(\kappa)}=0 \Rightarrow \tau_{T_{\sigma\tau\alpha\tau}}-\tau_{T_{\nu\eta\mu}}=0 \Rightarrow T_{\sigma\tau\alpha\tau}R=T_{\nu\eta\mu}R \Rightarrow T_{\sigma\tau\alpha\tau}=T_{\nu\eta\mu} \quad (2)$
- $\Sigma F_x=0 \Rightarrow T_{\sigma\tau\alpha\tau}+T_{\nu\eta\mu}-w_{2x}=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} 2T_{\sigma\tau\alpha\tau}=m_2 g\eta\mu\phi \Rightarrow$ **$T_{\sigma\tau\alpha\tau}$ = 5N**

  $T_{\sigma\tau\alpha\tau}=\mu N_1 \Rightarrow N_1=\dfrac{50}{\sqrt{3}}N \Rightarrow$ **$N_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}50N$**.

Λόγω δράσης - αντίδρασης: $N_1=N'_1$ και από την (1) έχουμε **$F_1=10\sqrt{3}N$**.

Β] i) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για τη ράβδο.



$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_{w_1}+W_{F_2} \Rightarrow \frac{1}{2}I_\rho\cdot\omega_1^2=-\Delta U_{\beta\alpha\rho}+\tau_{F_2}\Delta\theta$$

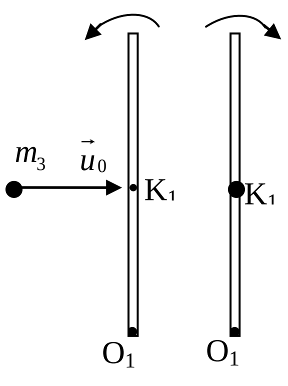
όπου $I_\rho=I_{cm}+m_1d^2=\dfrac{1}{12}m_1\ell^2+m_1\dfrac{\ell^2}{4}=\dfrac{m_1\ell^2}{3}$

Άρα $\dfrac{1}{2}\dfrac{m_1\ell^2}{3}\cdot\omega_1^2=U_{\beta\alpha\rho(\alpha\rho\chi)}-U_{\beta\alpha\rho(\tau\varepsilon\lambda)}+F_2\ell\Delta\theta$

$$\frac{m_1\ell^2}{6}\omega_1^2=-m_1gh-m_1g\frac{\ell}{2}+F_2\ell\Delta\theta \quad (3)$$

όπου $\eta\mu 30=\dfrac{h}{\ell/2} \Rightarrow h=\dfrac{\ell}{2}\cdot\eta\mu 30 \Rightarrow h=\dfrac{\ell}{4}$ και $\Delta\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

Άρα από την (3) βρίσκουμε: **$F_2=\dfrac{195}{4\pi}N$**.



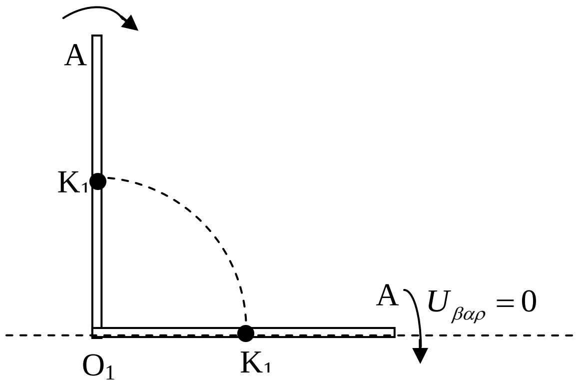
ii) Επειδή το σύστημα ράβδος - βλήμα είναι μονωμένο $(\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\omega\tau}=0)$ ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής:

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \overset{(\otimes +)}{\Rightarrow} L_{\beta\lambda}-L_\rho=L_\kappa$$

$$m_3u_o\frac{\ell}{2}-I_\rho\cdot\omega_1=(I_\rho+I_{\beta\lambda})\omega_2 \Rightarrow m_3u_o\frac{\ell}{2}-\frac{m_1\ell^2}{3}\omega_1=\left(\frac{m_1\ell^2}{3}+m_3\frac{\ell^2}{4}\right)\omega_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ **$u_o=20\dfrac{m}{s}$**

iii) Επειδή οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα (ράβδος -βλήμα) και παράγουν έργο είναι τα βάρη τους (συντηρητικές δυνάμεις), άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Μ.Ε.



$$E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} = E_{\mu\eta\chi(\tau\varepsilon\lambda)} \Rightarrow U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} = U_{\tau\varepsilon\lambda} + K_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$m_3 g\frac{\ell}{2} + m_1 g\frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\left(I_\rho + I_{\beta\lambda}\right)\cdot\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(I_\rho + I_{\beta\lambda}\right)\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{10}\,\frac{rad}{s}.$$

Άρα $L = \left(I_\rho + I_{\beta\lambda}\right)\cdot\omega \Rightarrow \mathbf{L = 30\sqrt{10}kg\frac{m^2}{s}}$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΘΕΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ)

Γ] i) Να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου μετά από χρόνο $\Delta t_1 = 3s$ από τη στιγμή που ο κύλινδρος ξεκινά την κίνησή του πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

ii) Τη στιγμή που ο κύλινδρος έχει αποκτήσει την πιο πάνω ταχύτητα, κόβουμε το νήμα. Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου μετά από χρόνο $\Delta t_2 = 2s$ από τη στιγμή που κόψαμε το νήμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ: i) $u_{cm(1)} = 10\, m/s$ **ii)** $K = 450J$ **.**

Επιμέλεια Θεμάτων : Δημήτριος Κούρος - Σωτήρης Καλοπίσης.